Skript Kurvendiskussion

FOS Friedberg, Hans-Georg Eßer, 06.12.2009

1 Erste Ableitung

Die erste Ableitung $f'(x)$ einer Funktion f an der Stelle x_0 ist definiert als Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Anschaulich ist die Ableitung an einer Stelle x_0 die Steigung der Tangente an den Punkt $(x_0; f(x_0))$, sie gibt also die Steigung der Funktion f an der Stelle x_0 an. Der Grenzwert erklärt sich anschaulich als Übergang von der Sekante (durch die Punkte bei x_0 und x_0+h) zur Tangente (im Punkt bei x_0), wenn h immer kleiner wird und damit x_0+h immer näher an x_0 heranrückt.

Da wir bei den hier betrachteten (ganzrationalen) Funktionen in jedem Punkt x_0 die Ableitung berechnen können, betrachten wir f' selbst wieder als Funktion (Ableitungsfunktion).

- Ist die Ableitung f' in einem Intervall negativ, ist f dort streng monoton fallend.
- Ist die Ableitung f' in einem Intervall positiv, ist f dort streng monoton steigend.

Durch Nullstellensuche in der ersten Ableitung entdecken Sie also die Stellen, an denen sich das **Monotonieverhalten** ändern *kann* (aber nicht muss). Erst die anschließende Untersuchung des Vorzeichenverhaltens von f' in der Nähe der Nullstellen (VZW-Tabelle) zeigt, welche der drei Möglichkeiten zutrifft:

- Ableitung f' ändert bei x_0 ihr Vorzeichen von $-$ nach $+$:
  Funktion f hat hier ein **relatives Minimum** (Funktion erst fallend, dann steigend)

- Ableitung f' ändert bei x_0 ihr Vorzeichen von $+$ nach $-$:
  Funktion f hat hier ein **relatives Maximum** (Funktion erst steigend, dann fallend)

- Ableitung f' ändert bei x_0 ihr Vorzeichen *nicht*:
  Funktion f hat hier einen **Terrassenpunkt**

Ist konkret nach den maximalen **Monotonieintervallen** gefragt, sind diese immer einschließlich der Nullstellen anzugeben – ist z. B. $f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ für $x < 1$ und $f'(x) > 0$ für $x > 1$, dann sind die maximalen Monotonieintervalle: f streng monoton steigend auf $[1; \infty[$, f streng monoton fallend auf $]-\infty; 1]$

2 Zweite Ableitung (und höhere)

Die zweite Ableitung f'' von f ist einfach die Ableitung der Ableitung f'. Entsprechend definieren wir dritte Ableitung f''', vierte Ableitung f'''' usw.

Nachdem wir gesehen haben, dass die 1. Ableitung die Steigung (und damit den Grad der Veränderung) der Funktion beschreibt, stellt auch die 2. Ableitung eine Veränderung dar – nämlich die der 1. Ableitung.

Daraus erfahren wir etwas über das **Krümmungsverhalten** einer Funktion:

Wenn die Werte der 1. Ableitung f' (von links nach rechts wandernd) immer größer werden, bedeutet das: Die Funktion wird immer steiler. Dieses Immer-steiler-werden entspricht einer Linkskrümmung. (f' streng $\uparrow$, also $f'' > 0$)

Entsprechend: Wenn die Werte der 1. Ableitung f' immer kleiner werden, bedeutet das: Die Funktion wird immer weniger steil. Dieses Immer-weniger-steil-werden entspricht einer Rechtskrümmung. (f' streng $\downarrow$, also $f'' < 0$)

Ein Übergang von Linkskrümmung zu Rechtskrümmung (oder andersrum) an einer Stelle x_0 bedeutet: Im Punkt selbst hat die erste Ableitung keine Steigung mehr (also $f''(x_0) = 0$), und vor und hinter x_0 hat f'' verschiedene Vorzeichen.

Wir untersuchen also wieder über eine VZW-Tabelle, wie sich das Verhalten von f'' in der Nähe der Nullstellen ändert, und schließen daraus auf die Existenz von Wendepunkten von f:

- 2. Ableitung f'' ändert bei x_0 ihr Vorzeichen von $-$ nach $+$:
  Funktion f hat hier einen **Wendepunkt** (Funktion erst rechts-, dann linksgekrümmt)
- 2. Ableitung f'' ändert bei x_0 ihr Vorzeichen von $+$ nach $-$:
  Funktion f hat hier einen **Wendepunkt** (Funktion erst links-, dann rechtsgekrümmt)
- 2. Ableitung f'' ändert bei x_0 ihr Vorzeichen *nicht*:
  Funktion f hat hier einen **Flachpunkt** (kein Wendepunkt; vgl. bei Nullstelle der 1. Ableitung ohne VZW: Terrassenpunkt statt Extremum)

Hinweis: Irgendwann "verschwinden" die höheren Ableitungen, d. h., sie werden konstant 0, Beispiel:

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$
$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$
$f''(x) = 6x - 4$
$f'''(x) = 6$
$f''''(x) = 0$ (und auch alle höheren)

3 Einige Definitionen

monoton fallend Eine Funktion f heißt streng monoton fallend im Intervall I, falls $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$

monoton fallend Eine Funktion f heißt streng monoton steigend im Intervall I, falls $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$

rechtsgekrümmt Eine Funktion f heißt rechtsgekrümmt im Intervall I, falls f' dort streng monoton steigend ist

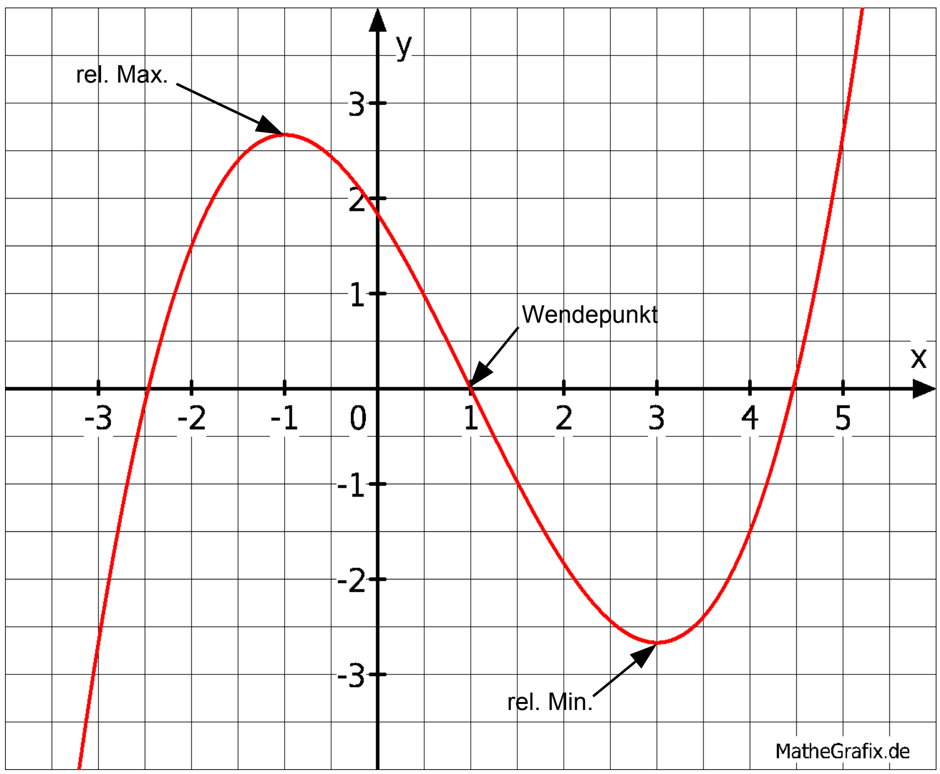
linksgekrümmt Eine Funktion f heißt linksgekrümmt im Intervall I, falls f' dort streng monoton fallend ist

4 Kurvendiskussion

Die Kurvendiskussion besteht nun aus der Untersuchung von f auf Nullstellen, Extrema (oder Terrassenpunkte) und Wendepunkte (oder Flachpunkte). In drei Phasen bestimmen Sie dazu die Nullstellen von f, f' und f'' und untersuchen die beiden Ableitungen auf Vorzeichenwechsel an den Nullstellen.

Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{6}(x-1)^3 - 2(x-1)$, Nullstellen: 1,
$f'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$, Nullstellen: $-1, 3$
$f''(x) = x - 1$, Nullstelle: 1



Untersuchung der Ableitungen ergibt:

x	< -1	-1	$]-1;3[$	3	> 3
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	streng $\uparrow$	Max.	streng $\downarrow$	Min.	streng $\uparrow$

x	< 1	1	> 1
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	rechtsgekr.	WP	linksgekr.

5 Hilfsmittel Polynomdivision

Die Suche nach Nullstellen läuft immer nach demselben Schema ab: Ist eine Nullstelle x_0 bereits bekannt (Funktionen in unseren Aufgaben haben immer ein leicht zu erratende

Nullstelle, die ganzzahlig ist), kann man die Funktion f mittel Polynomdivision durch $(x - x_0)$ teilen – da x_0 eine Nullstelle ist, muss diese Division ohne Rest aufgehen. Bleibt doch ein Rest beim Dividieren, war entweder die Nullstelle falsch, Sie haben durch $(x + x_0)$ statt $(x - x_0)$ geteilt oder einen Rechenfehler in der Division.

Tipp: Bei der Polynomdivision immer ganz ausführlich die Schritte hinschreiben, z. B. so:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 2) = x^2 - 4x + 3 \\
-(x^3 - 2x^2) \\
\hline
\qquad - 4x^2 + 11x \\
\quad - (-4x^2 + 8x) \\
\hline
\qquad\qquad\quad 3x - 6 \\
\qquad\qquad - (3x - 6) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Das Ergebnis, das bei der Polynomdivision heraus kommt, hat einen um eines verkleinerten Grad, im Beispiel: f ist 3. Grades, Ergebnis der Division ist 2. Grades. Im Prinzip ist dieser Schritt zu wiederholen, bis eine quadratische Funktion überbleibt, deren Nullstellen Sie über die Mitternachtsformel (oder über quadratische Ergänzung oder über "Hinsehen") angeben:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ist die quadratische Funktion schon normiert ($a = 1$), geht es bequemer über die pq-Formel:

$$f(x) = x^2 + px + q \Rightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

6 Bemerkungen

Ein Wendepunkt von f ist ein Extremum von f'. Können Sie angeben, welcher Art von Wendepunkt (links- nach rechtsgekrümmt oder rechts- nach linksgekrümmt) ein Maximum von f' bzw. Minimum von f' entspricht?

Ein Flachpunkt von f ist ein Terrassenpunkt von f'.