Lösung der H.A. 11.11.2009

Kleine Kurvendiskussion

1. $f(x) = x(x-1)(x-2)$
   1. Nullstellen: $0, 1, 2$
   2. Ableitung:
      $f(x) = x(x-1)(x-2)$
      $= (x^2-x)(x-2)$
      $= x^3-x^2-2x^2+2x$
      $= x^3-3x^2+2x$
      $f'(x) = 3x^2-6x+2$
   3. Nullstellen von $f'(x)$:
      $3x^2-6x+2=0 \Leftrightarrow x^2-2x+\frac{2}{3}=0$
      $\Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4-\frac{8}{3}} = 1 \pm \sqrt{1-\frac{2}{3}}$
      $= 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 1 \pm 0{,}577$
      $x_1 \approx 1{,}577,\ x_2 \approx 0{,}423$
      Vorzeichentabelle:

x	$< x_1$	x_1	$]x_1; x_2[$	x_2	$> x_2$
$f'(x)$	+	0	−	0	+

Also lok. Max. $\approx$ $(0{,}423; 0{,}385)$

lok. Min. $\approx (1{,}577; -0{,}385)$

b) $f(x) = x^4-2x^3 = x^3\cdot(x-2)$
   1. Nullstellen: $0, 0, 0, 2$
   2. $f'(x) = 4x^3-6x^2 = x^2(4x-6)$
   3. Nullstellen: $0, 0, 3/2$
      Vorzeichentabelle:

x	<0	0	$]0; 3/2[$	$3/2$	$>3/2$
$f'(x)$	−	0	−	0	+

kein VZW bei 0
VZW von − nach + bei $3/2$, also lok. Min.
bei $(3/2; -1{,}6875)$

c) $f(x) = x^4-4x^2 = x^2(x^2-4) = x^2(x-2)(x+2)$
   1. Nullstellen: $0, 0, 2, -2$
   2. $f'(x) = 4x^3-8x = 4x(x^2-2)$
   3. Nullstellen: $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

x	$<-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$]-\sqrt{2}; 0[$	0	$]0; \sqrt{2}[$	$\sqrt{2}$	$>\sqrt{2}$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+

Drei VZW
lok. Min. $(-\sqrt{2}; -4)$
lok. Max. $(0; 0)$
lok. Min. $(\sqrt{2}; -4)$

   4. Weitere Punkte:
      $f(-2{,}25) \approx 5{,}38$
      $f(2{,}25) \approx 5{,}38$